PROF. PIO

MATEMÁTICA • 2022

NOME:

INTENSIVO

RESUMO

DEFININDO UMA FUNÇÃO

Denotaremos por $f : A \to B$ a função de A em B, por vezes também escrita como $y = f(x)$. Nesse caso, A e B são conjuntos numéricos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Alguns elementos importantes das funções são:

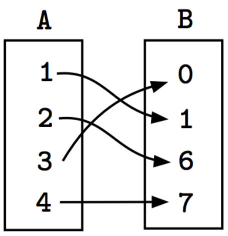
- DOMÍNIO (D): conjunto de valores que a variável x admite. Na nossa representação, o domínio é representado pelo conjunto A.
- CONTRADOMÍNIO (CD): conjunto de valores que y pode assumir. Nesse caso, o contradomínio é representado pelo conjunto B.
- IMAGEM (Im): conjunto de valores y para os quais existe um correspondente x associado.

> A imagem de uma função é o conjunto que contém todos os valores que a função assume no eixo y do plano cartesiano. Em outras palavras: o conjunto-imagem é um subconjunto do contradomínio.

IDENTIFICANDO UMA FUNÇÃO

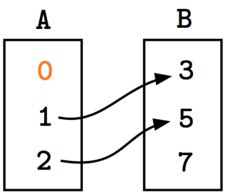
Dizemos que uma relação $f : A \to B$ é uma função se, e somente se, todo elemento do conjunto A possuir um, e apenas um, representante no conjunto B.

Veja os exemplos abaixo, em formato de diagrama de flechas:

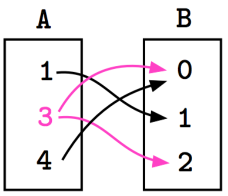


É FUNÇÃO, pois todo elemento de A possui um, e apenas um, valor associado no conjunto B. Nesse caso:

- $f(1) = 1$
- $f(2) = 6$
- $f(3) = 0$
- $f(4) = 7$



NÃO É FUNÇÃO, pois existe um elemento de A $(x = 0)$ que não possui um valor associado no conjunto B.

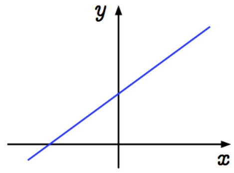


NÃO É FUNÇÃO, pois existe um elemento de A $(x = 3)$ associado a mais de um elemento do conjunto B $(y = 0$ e $y = 2)$.

FUNÇÃO DO 1º GRAU

É uma função do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

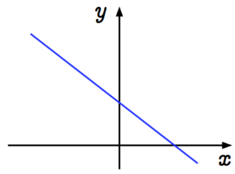
O gráfico de funções afim (como também são chamadas as funções de primeiro grau) é uma reta.



$y = ax + b$

$a > 0$: FUNÇÃO CRESCENTE

> x AUMENTA $\Rightarrow$ y AUMENTA
> x DIMINUI $\Rightarrow$ y DIMINUI



$y = ax + b$

$a < 0$: FUNÇÃO DECRESCENTE

> x AUMENTA $\Rightarrow$ y DIMINUI
> x DIMINUI $\Rightarrow$ y AUMENTA

FUNÇÃO DO 2º GRAU

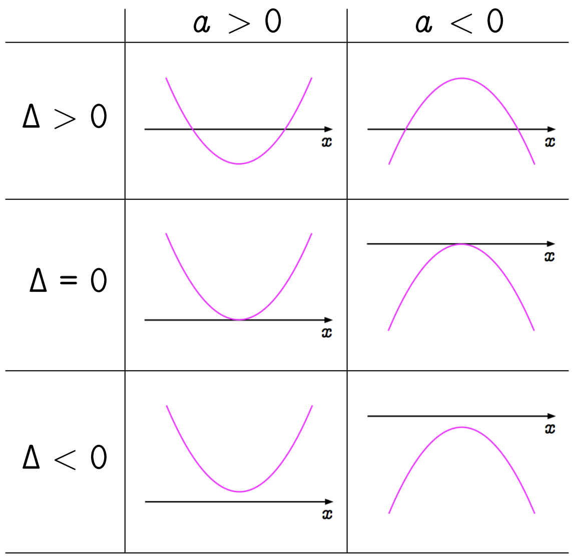
É uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

O gráfico de funções quadráticas (como também são chamadas as funções de segundo grau) possui um formato conhecido como parábola.

Define-se por $\Delta = b^2 - 4ac$ o discriminante da função quadrática e as duas raízes dessa função, quando existem, são da forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Abaixo, os possíveis formatos da parábola:



FORMA GERAL PARÁBOLA

Toda função quadrática é um polnômio de grau 2 cuja equação é do tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

FORMA FATORADA DA PARÁBOLA

Toda função quadrática com raízes reais x_1 e x_2 pode ser expressa na forma:

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

FORMA CANÔNICA DA PARÁBOLA

Se o vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui abscissa x_V e ordenada y_V, então ela pode ser reescrita como:

$$y = a \cdot (x - x_V)^2 + y_V$$

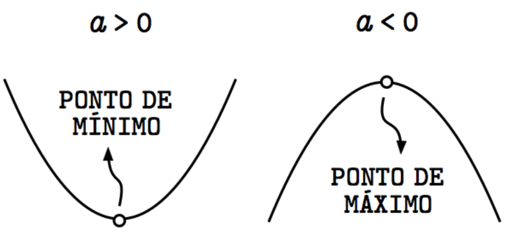
VÉRTICE DA PARÁBOLA

Toda parábola possui um vértice, definido por $V\left(x_V;\ y_V\right)$ no plano cartesiano. As coordenadas x_V e y_V são tais que:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Vale ressaltar que a interpretação do vértice depende do sinal do parâmetro a:

- $a > 0$: vértice é PONTO DE MÍNIMO da parábola;
- $a < 0$: vértice é PONTO DE MÁXIMO da parábola.



CLASSIFICANDO AS FUNÇÕES QUANTO À IMAGEM

Uma função pode ser classificada, quanto ao número de elementos no seu conjunto-imagem, como:

- FUNÇÃO SOBREJETORA: todos os elementos do contra-domínio da função estão associados a algum elemento de seu domínio. É o caso em que o contra-domínio é igual à imagem da função, isto é, $CD = Im$.
- FUNÇÃO INJETORA: cada elemento da imagem da função possui <u>apenas um</u> elemento associado a seu domínio. Em outras palavras: se tomarmos $x_1 \neq x_2$, certamente $y_1 \neq y_2$.
- FUNÇÃO BIJETORA: valem, simultaneamente, as propriedades de função sobrejetora e injetora.

Apenas funções bijetoras admitem função inversa.

FUNÇÃO INVERSA

Se g é a função inversa da função f, então vale que:

$$f\left(g(x)\right) = x = g\left(f(x)\right)$$

O domínio da função g é equivalente ao conjunto-imagem da função f, ao passo que o conjunto-imagem da função g é equivalente ao domínio da função f. Matematicamente:

$$D_g = Im_f \quad \text{e} \quad Im_g = D_f$$

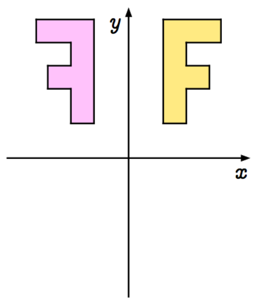
Também é comum utilizar a notação f^{-1} para referir-se à função inversa da função f.

GUIA PRÁTICO PARA A OBTENÇÃO DA INVERSA

- 1º PASSO: isolar a variável x;
- 2º PASSO: inverter as posições de x e y.

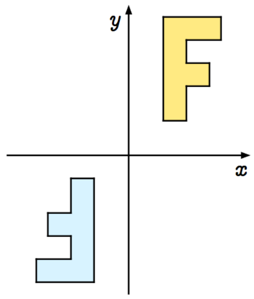
CLASSIFICANDO FUNÇÕES QUANTO À SIMETRIA

Objetivando definir uma função em relação a seu comportamento gráfico, introduzimos as definições de função par e ímpar.



A simetria em relação ao eixo y é uma característica de todas as funções pares.

FUNÇÃO PAR:
$f(x) = f(-x)$



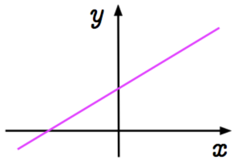
A simetria em relação à origem é uma característica de todas as funções ímpares.

FUNÇÃO ÍMPAR:
$f(x) = -f(-x)$

Há funções que não possuem simetria. Nesses casos, apenas dizemos que essas funções não são pares ou ímpares.

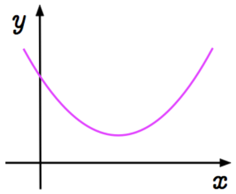
GRÁFICOS MAIS COMUNS

Um importante instrumento para trabalhar com funções é conhecer seus principais gráficos. A seguir são apresentados alguns exemplos, recorrentes na matemática.



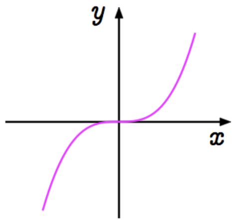
FUNÇÃO DE 1º GRAU

$y = ax + b$



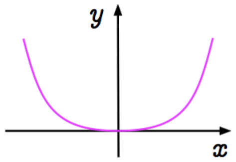
FUNÇÃO DE 2º GRAU

$y = ax^2 + bx + c$



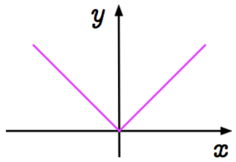
FUNÇÃO DE 3º GRAU

$y = x^3$



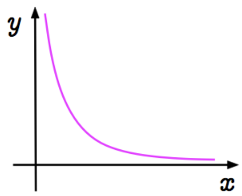
FUNÇÃO DE 4º GRAU

$y = x^4$



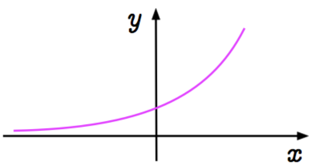
FUNÇÃO MODULAR

$y = |x|$



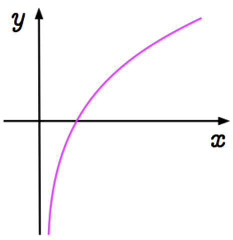
RAMO DE HIPÉRBOLE

$y = \dfrac{1}{x}; \quad x > 0$



FUNÇÃO EXPONENCIAL

$y = a^x; \quad a > 1$



FUNÇÃO LOGARÍTMICA

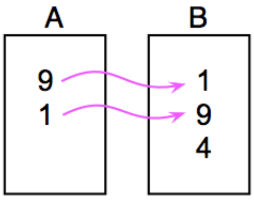
$y = \log x; \quad x > 0$

ANOTAÇÕES

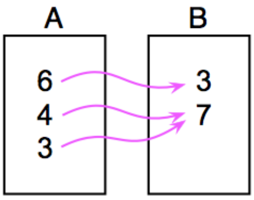
1. **#C03Q01**

A partir dos diagramas de flecha exibidos abaixo, classifique as funções como injetoras, sobrejetoras ou bijetoras. *Atenção: alguns diagramas não representam funções.*

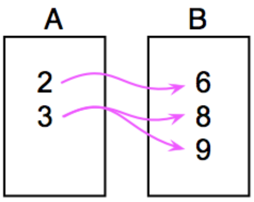
a)



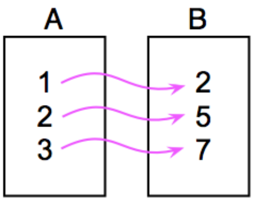
b)



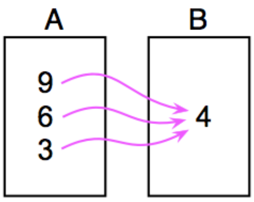
c)



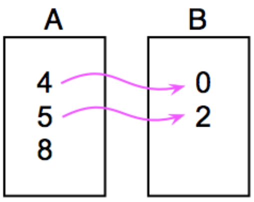
d)



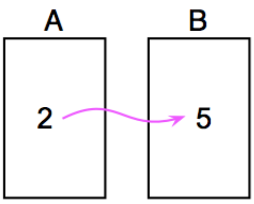
e)



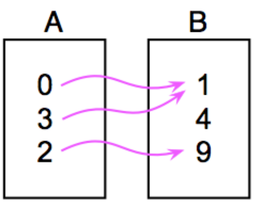
f)



g)



h)



2. **#C03Q02**

Classifique as funções abaixo em relação à injetividade e sobrejetividade.

a) $f:\ \{1,2,3\} \to \{1,4,9\},\ f(x) = x^2$

b) $g:\ \{-1,0,1\} \to \{0,1,2\},\ g(x) = x^2$

c) $h:\ \{-1,0,1\} \to \{0,1\},\ h(x) = x^2$

d) $k:\ \{0,1\} \to \{0,1\},\ k(x) = x^2$

e) $m:\ [0,1] \to [0,1],\ m(x) = x^2$

f) $n:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ n(x) = x^2$

g) $p:\ \{-1,0,1\} \to \{-1,0,1\},\ p(x) = x^3$

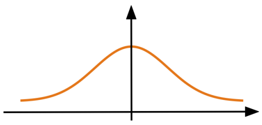
3. **#C03Q03** **MACK**

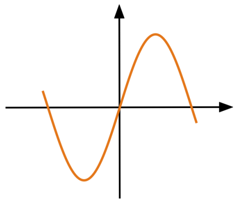
A função f definida em $\mathbb{R} - \{2\}$ por $f(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$ é invertível. O seu contradomínio é $\mathbb{R} - \{a\}$. O valor de a é:

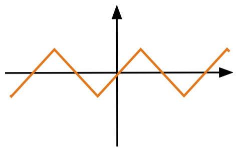
a) 2 b) -2 c) 1 d) -1 e) 0

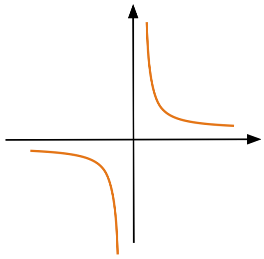
4. **#C03Q04**

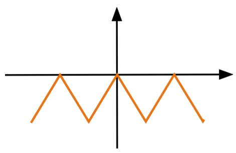
Determinar, a julgar pelo gráfico, a paridade das funções abaixo.

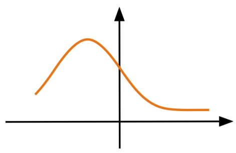
a) 

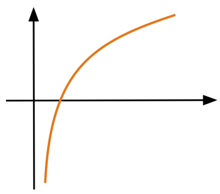
b) 

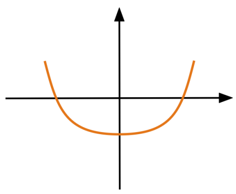
c) 

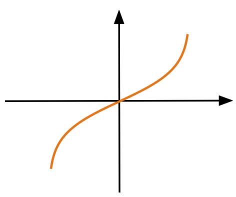
d) 

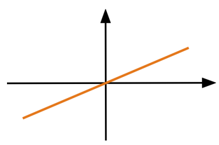
e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

j) 

5. **#C03Q05** **UNIFESP 2010 :: 2ª FASE**

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se par quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Quais, dentre os gráficos exibidos, melhor representam funções pares ou funções ímpares? Justifique sua resposta.

gráfico I

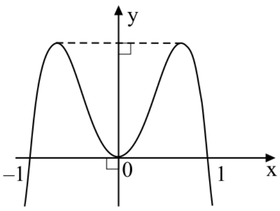


gráfico II

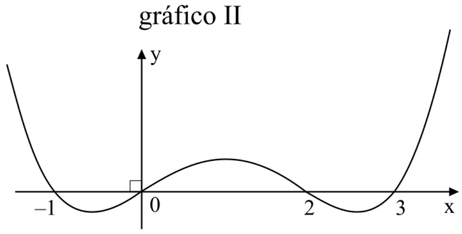


gráfico III

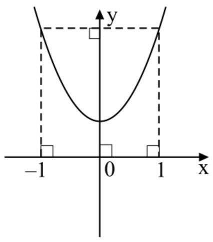


gráfico IV

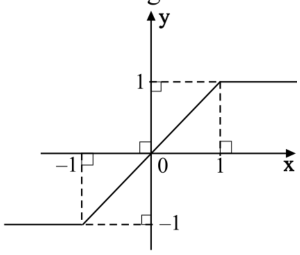
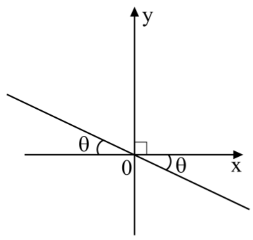


gráfico V



b) Dê dois exemplos de funções, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, sendo uma par e outra ímpar, e exiba os seus gráficos.

RESOLUÇÃO

TAREFA

6. #C03Q06

As funções abaixo têm seus domínios limitados apenas pela condição de existência que lhes é imposta. Assim, determine quais delas são pares, quais são ímpares e quais não possuem qualquer das classificações.

a) $f(x) = x^6 + x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = |x|$
d) $f(x) = \tan x$
e) $f(x) = \sec x$
f) $f(x) = \sqrt{x^2}$
g) $f(x) = (x-1)^2$
h) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
i) $f(x) = \ell n(x^2)$
j) $f(x) = x \cdot \text{sen } x$

7. #C03Q07 — FUVEST

O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções reais $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ e $g(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+3}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

8. #C03Q08 — MACK

A função real definida por $f(x) = ax^n, n \in \mathbb{N}^*$, é tal que $f(f(x)) = 8x^4$. Então, o número real a vale:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) 2 c) 4 d) $\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{1}{2}$

9. #C03Q09 — UFMG

Seja $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$, $B = \{1,4,6,9\}$ a função sobrejetora tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Então A é igual a:

a) $\{1,-1,2,-2,\sqrt{6},-\sqrt{6},3,-3\}$
b) $\{1,2,\sqrt{6},3\}$
c) $\{1,-1,16,-16,36,-36,81,-81\}$
d) $\{1,16,36,81\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

10. #C03Q10 — PUC SP

Seja $D = \{1,2,3,4,5\}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = (x-2)\cdot(x-4)$. Então:

a) f é sobrejetora.
b) f é injetora.
c) f é bijetora.
d) o conjunto imagem de f possui 3 elementos somente.
e) $Im(f) = \{-1,0,1\}$

11. #C03Q11 — PUCCAMP

Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = x^2+3$. É correto afirmar que a função $f \circ g$, composta de g em f, é:

a) bijetora
b) ímpar
c) par
d) decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$
e) injetora e não sobrejetora

12. #C03Q12 — VUNESP

Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x+1$. Se f^{-1} é a função inversa de f, então $f(f(1/2)) - f^{-1}(5)$ é igual a:

a) $f(1)$ b) $f(-2)$ c) $2 \cdot f(1/2)$
d) $3 \cdot f(-1/2)$ e) $1/2 \cdot f(-1)$

13. #C03Q13 — UECE

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função bijetora tal que $f(5) = 2$. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função inversa de f, então $g^{-1}(5)$ é igual a:

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

14. #C03Q14 — FMJ

Sejam as funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = kx + t$. A função g será inversa de f se, e somente se:

a) $\dfrac{k}{t} = \dfrac{1}{4}$
b) $k - t = 1$
c) $k = 2t$
d) $k + t = 0$
e) $k = t = \dfrac{1}{2}$

15. #C03Q15 — VUNESP

Determine a função inversa de $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

a) $\dfrac{1}{1-x}$ b) $\dfrac{1}{1+x}$ c) $\dfrac{1-x}{1+x}$ d) $\dfrac{1+x}{1-x}$ e) $x+1$

16. #C03Q16 — UFSC

Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2+1$, determine a soma dos números associados às informações verdadeiras.

01. A função é sobrejetora.
02. A imagem da função é $\mathbb{R}_+$.
04. A função é bijetora.
08. Para $x = \sqrt{5}$, temos $f(x) = 6$.
16. O gráfico da função é uma reta.
32. A função é par.

17. #C03Q17 — UFRN

Sejam E o conjunto formado por todas as escolas de ensino médio de Natal e P o conjunto formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto E. Se $f : E \to P$ é a função que a cada escola de E associa seu número de professores, então:

a) f não pode ser uma função bijetora.
b) f não pode ser uma função injetora.
c) f é uma função sobrejetora.
d) f é necessariamente uma função injetora.

18. #C03Q18 — FUVEST 2011

Sejam $f(x) = 2x - 9$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$. A soma dos valores absolutos das raízes da equação $f(g(x)) = g(x)$ é igual a:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

19. **#C03Q19** **FGV**

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim. Se $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$ e $f(5) = 5$, então $f(\pi)$ é:

a) um número irracional.
b) um racional não inteiro.
c) -1.
d) 0.
e) 5.

20. **#C03Q20** **UFSCAR**

Considere as funções reais f e g, definidas por

$$f(x) = \frac{(x-2)}{\sqrt{x-2}} \quad \text{e} \quad g(x) = |3 - 2x| + 1$$

a) Determine o domínio da função f e a imagem da função g.
b) Determine o domínio de $f(g(x))$.

21. **#C03Q21** **UFJF**

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax - 8$ e tal que $f(f(1)) > 1$. O menor valor inteiro positivo possível para a é:

a) um número ímpar.
b) um número primo.
c) um múltiplo de 3.
d) um múltiplo de 5.
e) um múltiplo de 7.

22. **#C03Q22** **UFG**

Considere as funções $f(x) = mx + 3$ e $g(x) = x^2 - 2x + 2$, onde $m \in \mathbb{R}$. Determine condições sobre m para que a equação $f(g(x)) = 0$ tenha raiz real.

23. **#C03Q23** **INSPER**

Considere um número inteiro m e uma função de variável real f, dada pela lei

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6 - m}}{x^2 - 4x + m}.$$

Se o domínio da função f é o conjunto dos números reais, $(\mathbb{R})$, então:

a) $m = 2$ ou $m = 4$
b) $m = 4$ ou $m = 5$
c) $m = 2$
d) $m = 4$
e) $m = 5$

24. **#C03Q24** **UFSCAR**

As funções f e g associam, a cada número natural, o resto da divisão do número por 3 e por 6, respectivamente. Sendo assim, para todo número natural x, $g(f(x))$ é igual a:

a) $f(x)$
b) $g(x)$
c) $2 \cdot f(x)$
d) $2 \cdot g(x)$
e) $f(x) + g(x)$

25. **#C03Q25** **MACK 2011**

Se $f(x) = mx + n$ e $f(f(x)) = 4x + 9$, a soma dos possíveis valores de n é:

a) 6
b) -6
c) 12
d) -12
e) -18

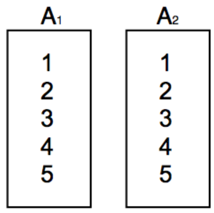
26. **#C03Q26** **FEI**

Se $f(2x + 3) = 4x^2 + 6x + 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$, então $f(1 - x)$ vale:

a) $2 - x^2$
b) $2 + x^2$
c) $x^2 + 2x - 4$
d) $3x^2 - 2x + 4$
e) $x^2 + x - 1$

27. **#C03Q27** **INSPER 2012**

O conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ foi representado duas vezes, na forma de diagrama, na figura abaixo.



Para definir uma função sobrejetora $f : A \to A$ uma pessoa ligou cada elemento do diagrama A_1 com um único elemento do diagrama A_2, de modo que cada elemento do diagrama A_2 também ficou ligado a um único elemento do diagrama A_1. Sobre a função f assim definida, sabe-se que:

- $f(f(3)) = 2$
- $f(2) + f(5) = 9$

Com esses dados, pode-se concluir que $f(3)$ vale:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

28. **#C03Q28** **UFPE**

Considere as funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} g(x+2) & \text{se } x < 0 \\ 2x + 5 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcule $f(-3)$.

29. **#C03Q29** **PUCCAMP**

O biodiesel resulta da reação química desencadeada por uma mistura de óleo vegetal (soja, milho, mamona, babaçu e outros) com álcool de cana. O ideal é empregar uma mistura do biodiesel com diesel de petróleo, cuja proporção ideal ainda será definida. Quantidades exageradas de biodiesel fazem decair o desempenho do combustível.

Relativamente à função desempenho do combustível definida por $f(p) = 12p - p^2$, $0 \leq p \leq 12$, é correto afirmar que se f é de:

a) $[0; 12]$ em $\mathbb{R}_+$, então f é injetora.
b) $[0; 12]$ em $\mathbb{R}$, então f é sobrejetora.
c) $[0; 12]$ em $[0; 36]$, então f é bijetora.
d) $[0; 6]$ em $[0; 36]$, então $f^{-1}(p) = 6 + \sqrt{36 - p}$.
e) $[0; 6]$ em $[0; 36]$, então $f^{-1}(p) = 6 - \sqrt{36 - p}$.

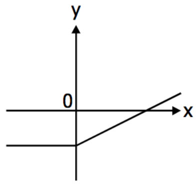
30. **#C03Q30** **UNICAMP 2017**

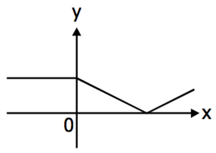
Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a:

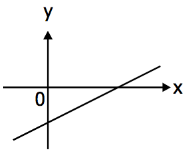
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

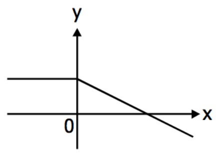
31. **#C03Q31** — **MACK**

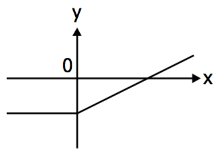
Na figura, temos o esboço do gráfico de uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. O melhor esboço gráfico da função $g(x) = f(|x|)$ é:

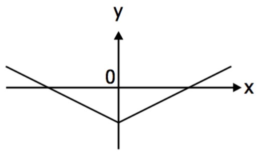


a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

32. **#C03Q32** — **MACK 2014**

Se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = |3^x - 1|$, a afirmação correta sobre f é:

a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.
b) f é uma função crescente para todo x real.
c) f não é injetora nem sobrejetora.
d) f é injetora mas não é sobrejetora.
e) $Im(f) = \mathbb{R}^*_+$.

33. **#C03Q33** — **UFT**

Seja a um número real e $f :]-\infty; \infty[\to [a; \infty[$ uma função definida por $f(x) = m^2x^2 + 4mx + 1$, com $m \neq 0$. O valor de a para que a função f seja sobrejetora é:

a) -4 b) -3 c) 3 d) 0 e) 2

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

34. **#C03Q34** — **ITA**

Seja $D = \mathbb{R} - \{1\}$ e $f : D \to D$ uma função dada por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Considere as afirmações:

I. f é injetiva e sobrejetiva.
II. f é injetiva, mas não sobrejetiva.
III. $f(x) + f(1/x) = 0$, para todo $x \in D$, $x \neq 0$.
IV. $f(x) \cdot f(-x) = 1$, para todo $x \in D$.

Então, são verdadeiras:

a) apenas **I** e **III**.
b) apenas **I** e **IV**.
c) apenas **II** e **III**.
d) apenas **I**, **III** e **IV**.
e) apenas **II**, **III** e **IV**.

35. **#C03Q35** — **UFSCAR**

Sejam as funções $f(x) = |x - 1|$ e $g(x) = x^2 + 4x + 4$.

a) Calcule as raízes de $f\left(g(x)\right) = 0$.
b) Esboce o gráfico de $f\left(g(x)\right)$, indicando os pontos em que o gráfico intercepta o eixo cartesiano.

36. **#C03Q36** — **UFPE**

Seja $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$ o conjunto dos naturais e

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(m; n) \to 2^m(2n+1)$$

Analise as afirmações:

I. f é injetora.
II. f é sobrejetora.
III. f é bijetora.
IV. A imagem de f consiste dos números pares.
V. A imagem de f não contém primos.

37. **#C03Q37** — **UEM 2011**

Sobre as funções definidas por $f(x) = 2^{-1/x}$ e $g(x) = (1/2)x^2$ cujos domínios são ambos o intervalo $]0,1[$ da reta real, é correto afirmar que:

01. ambas são funções injetoras.
02. ambas funções são decrescentes no intervalo em questão.
04. a imagem da função g corresponde ao intervalo $\left]0, 1/2\right[$.
08. O vértice do gráfico de g é o ponto $\left(1/2, 1/8\right)$.
16. $(g \circ f)(1/2) > 1/10$.

38. **#C03Q38** — **ITA 2010**

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:

I. $f \cdot g$ é ímpar.
II. $f \circ g$ é par.
III. $g \circ f$ é ímpar.

é (são) verdadeira(s):

a) apenas **I**.
b) apenas **II**.
c) apenas **III**.
d) apenas **I** e **II**.
e) todas.

39. **#C03Q39** **FUVEST :: 2ª FASE**

Uma função f satisfaz a identidade $f(ax) = af(x)$ para todos os números reais a e x. Além disso, sabe-se que $f(4) = 2$. Considere ainda a função $g(x) = f(x-1)+1$ para todo o número real x.

a) Calcule $g(3)$.

b) Determine $f(x)$, para todo x real.

c) Resolva a equação $g(x) = 8$.

40. **#C03Q40** **UFSCAR**

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ uma função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ x/2, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

Se n é ímpar e $f(f(f(n))) = 5$, a soma dos algarismos de n é igual a:

a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

ANOTAÇÕES

PROGRAMAÇÃO — INTENSIVO

Aulas com 2h de duração, ocorrendo às 15h nas quintas-feiras.

LISTA	TEMA	DIAS
01	MATEMÁTICA FINANCEIRA E PORCENTAGEM	04/AGO
02	FUNÇÕES I	11/AGO
03	FUNÇÕES II	18/AGO
04	TRIGONOMETRIA	25/AGO
05	SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS	01/SET
06	EXPONENCIAL E LOGARITMO	08/SET
07	GEOMETRIA PLANA I	15/SET
08	GEOMETRIA PLANA II	22/SET
09	GEOMETRIA PLANA III	29/SET
10	TÉCNICAS DE CONTAGEM	06/OUT
11	PROBABILIDADE	13/OUT
12	GEOMETRIA ESPACIAL I	20/OUT
13	GEOMETRIA ESPACIAL II	27/OUT
14	ÁLGEBRA LINEAR	03/NOV
15	GEOMETRIA ANALÍTICA I	10/NOV
16	GEOMETRIA ANALÍTICA II	17/NOV
17	NÚMEROS COMPLEXOS	24/NOV
18	POLINÔMIOS	01/DEZ

SUGESTÕES

6. Calcular $f(-x)$ e comparar com $f(x)$. No caso de $f(-x)$ ser igual a $f(x)$, a função será par; se $f(-x)$ é igual a $-f(x)$, a função será ímpar; caso nenhuma das duas igualdades seja verificada, a função não será par nem ímpar.

7. Fazer a substituição $x^2 = y$ e determinar o número de soluções da equação. Em seguida, resolver para x.

8. Lembrar da definição de função composta, substituindo x por $f(x)$.

9. Notar que se f é sobrejetora, $\mathrm{CD} = \mathrm{I}m$.

10. Recordar os conceitos de injetividade e sobrejetividade.

11. É mais simples pensar em $f \circ g$ como $f[g(x)]$.

12. Determinar a inversa de f e substituir na expressão dada.

13. Notar que $g = f^{-1}$ e que, portanto, $g^{-1} = f$.

14. Encontrar a inversa da função f e lembrar do conceito de identidade polinomial (todos os coeficientes das funções devem ser iguais para que as funções sejam idênticas).

15. Isolar x em $y = \dfrac{x-1}{x}$. Após, inverter as posições de x e y.

16. Lembrar da definição de função sobrejetora, injetora e bijetora, bem como dos conceitos de função par e ímpar. Para determinara a imagem de f, esboçar seu gráfico.

17. Recordar os conceitos de injetividade e sobrejetividade. Notar, também, que duas escolas podem ter o mesmo número de professores.

18. Determinar $f(g(x))$ e resolver a equação dada. Lembre-se: valor absoluto é o mesmo que <u>módulo</u>.

19. Escrever $f(x) = ax + b$ e substituir nas inequações dadas.

20. Para f, seu denominador deve ser não-nulo e o radicando deve ser não-negativo. Para g, não há restrições sobre o domínio. No segundo item, perceba que a imagem de g deve satisfazer às condições do item anterior.

21. Calcular $f(1)$ e utilizar esse valor na função f. O resultado deve ser superior a 1. Resolver a inequação.

22. Encontrar $f(g(x))$ e, em seguida, forçar $\Delta \geq 0$. Note que $m \neq 0$ (por quê?)

23. Analisar as duas condições que devem ser satisfeitas simultaneamente: $x^2 - 2x + 6 - m \geq 0$ e $x^2 - 4x + m \neq 0$.

24. Utilizando o algoritmo da divisão, pode-se perceber que $f(x) = x - 3 \cdot c_1$, sendo c_1 o quociente da divisão de x por 3, e que $g(x) = x - 6 \cdot c_2$, com c_2 sendo o quociente da divisão de x por 6. Para interpretar $g(f(x))$, escrever essa função composta de modo que ela se assemelhe a uma expressão do tipo $x - 3 \cdot c_3$, sendo c_3 o quociente da divisão de x por 3. Você perceberá que $f(x)$ e $g(f(x))$ executam a mesma tarefa.
<u>Observação:</u> o algoritmo da divisão afirma que, se a divisão de certo número A por um número B deixa quociente C e resto R, então $\mathrm{A} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{C} + \mathrm{R}$.

25. Calcular $f(f(x))$ e utilizar o conceito de <u>identidade polinomial</u>.

26. Mudança de variável: $2x + 3 = 1 - t$. Com isso, determinar $f(1-t)$ e consequentemente $f(1-x)$.

27. Como $n(\mathrm{D}) = n(\mathrm{CD})$, para que a função seja sobrejetora ela também precisa ser injetora. Mais: Como $f(2) + f(5) = 9$, um desses valores é 4 e o outro é 5. Analisar os demais casos um a um, eliminando aqueles que violarem alguma das condições impostas no enunciado.

28. Substituir x por -3 na primeira equação. Em seguida, observar o que ocorre com $g(x+2)$ e efetuar as operações adequadas até que se chegue a um valor numérico.

29. Fazer $y = 12p - p^2$ e isolar y (isso requer alguma manipulação algébrica). Após, analisar se a imagem da função obtida coincide com o domínio da função p, dada no enunciado.

30. Calcular inicialmente as funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$. Atentar ao fato de que $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn} \neq a^{m^n}$.

31. Observe que independentemente do valor fornecido à função, ele sempre será tratado como um número não-negativo. Assim, basta analisar o que ocorre com o gráfico quando $x > 0$ e quando $x < 0$.

32. Retomar os conceitos de domínio e imagem e associá-los aos conceitos de injetividade e sobrejetividade. Esboçar o gráfico de f pode ser útil.

33. f será sobrejetora se, e somente se, $\mathrm{I}m_f = [a, +\infty)$. Note que o gráfico de f é uma parábola com concavidade voltada pra cima, isto é, a coordenada y_V do vértice indica seu ponto de mínimo.

34. Para encontrar a imagem de f, assumir que ela seja bijetora e encontrar seu domínio (por quê?). Em seguida, comparar com o contradomínio dado. Para verificar se f é injetora, calcular $f(a)$ e igualar a $f(b)$. Caso a solução dessa igualdade seja $a = b$, então concluiremos que ela é injetora.

35. Retomar os conceitos de função composta e determinar $f(g(x))$. Para o item b), lembrar o efeito do módulo sobre o gráfico de uma função qualquer.

36. Retomar os conceitos de injetividade e sobrejetividade. Pode ser útil lembrar que um número par é da forma $2k$, com $k \in \mathbb{Z}$

37. Retomar os conceitos de injetividade e sobrejetividade. Esboçar os gráficos de ambas as funções pode ser útil.

38. Como f é par, $f(-x) = f(x)$ para qualquer $x \in \mathrm{D}_f$. Como g é ímpar, $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathrm{D}_g$. Com essas observações, substituir x por $-x$ em cada item proposto.

39. Para obter $f(2)$, usar $f(4) = f(2 \cdot 2) = 2f(2)$. No segundo item, fazer $ax = 4$ pode ser útil.

40. Supor dois cenários iniciais: n par ou n ímpar. Para cada caso, calcular sucessivamente $f(f(f(n)))$, igualando o resultado a 5. Procurar por inconsistências em cada uma das situações.

MARCADOR DE PROGRESSO

1	2	3	4	5	6 ⚡	7	8	9 ⚡	10 ⚡
11 ⚡	12 ⚡	13	14	15 ⚡	16	17 ⚡	18 ⚡	19	20 ⚡
21 ⚡	22	23 ⚡	24	25	26 ⚡	27 ⚡	28	29 ⚡	30 ⚡
31 ⚡	32	33	34	35	36	37	38	39 ⚡	40

O símbolo ⚡ denota uma questão da tarefa mínima, que deve ter prioridade em suas atividades.

GABARITO — TESTES

1. •	**2. •**	**3. D**	**4. •**	**5. •**
6. •	**7. A**	**8. B**	**9. D**	**10. D**
11. C	**12. A**	**13. A**	**14. E**	**15. A**
16. •	**17. C**	**18. D**	**19. E**	**20. •**
21. D	**22. •**	**23. E**	**24. A**	**25. B**
26. E	**27. A**	**28. •**	**29. E**	**30. C**
31. E	**32. C**	**33. B**	**34. A**	**35. •**
36. •	**37. •**	**38. D**	**39. •**	**40. A**

GABARITO — DISCURSIVAS

1.
a) injetora, não sobrejetora.
b) não injetora, não sobrejetora.
c) não é função.
d) bijetora.
e) sobrejetora, não injetora.
f) não é função.
g) bijetora.
h) não injetora, não sobrejetora.

2.
a) injetora e sobrejetora
b) não injetora e não sobrejetora
c) não injetora e sobrejetora
d) injetora e sobrejetora
e) injetora e sobrejetora
f) injetora e não sobrejetora
g) injetora e sobrejetora

4.
a) P b) I c) I d) I e) P
f) – g) – h) P i) I j) I

5.
a) **I** e **III** representam funções pares, **IV** e **V** funções ímpares.
b)
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen} x$ é ímpar.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\cos x$ é par.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$ é par.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3$ é ímpar.

6.
a) P b) I c) P d) I e) P
f) P g) – h) I i) P j) P

16. 40

20. a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>2\}$ e $Im_g=\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq 1\}$

b) $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<1 \text{ ou } x>2\}$

22. $-3\leq m<0$

28. 5

35. a) $S=\{-3;-1\}$ b) gráfico

36. V – F – F – F – F

37. 05

39. a) $g(3)=2$ b) $f(x)=\dfrac{x}{2}$ c) $S=\{15\}$

EXTENSIVO

- Parte A: 2ª feira, das 19h00 às 20h00
- Parte B: 3ª feira, das 19h00 às 21h00

INTENSIVO

- 5ª feira, das 15h00 às 17h00

REVISÃO ENEM

- 4ª feira, das 19h00 às 21h00
(INÍCIO DAS AULAS: 31/AGO)

PLANTÕES DE DÚVIDAS

Os plantões são online (via WhatsApp) e as dúvidas podem ser enviadas a qualquer dia e horário.

NOTAS DE AULA

Não se preocupe em copiar conteúdos durante a aula, pois as anotações são disponibilizadas no site da Base2.

GRUPO DE DÚVIDAS

Há um grupo no WhatsApp destinado à discussão de dúvidas na resolução dos exercícios. Solicite o ingresso através de nossos canais de atendimento.

Não deixe de ingressar no grupo de dúvidas. Além das resoluções de exercícios, conteúdos extras, complementos de aula e interação durante os eventos ao vivo ocorrem por este canal. Solicite o acesso na secretaria.

Matemática e Redação para Vestibular

base2ensino
11 4444-4443
contato@base2.net
base2.net